1.8.10 Mnohočleny - shrnutí

Předpoklady: 010809

Důležité znalosti

- Sčítáme a odčítáme pouze členy se stejnými mocninami neznámých.
- Násobíme každý člen s každým.
- Obousměrné vzorce $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.
- $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$, $(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$
- Dělení ve třech krocích:
    - nejvyšší mocninu dělíme nejvyšší mocninou,
    - zpětně násobíme
    - odečteme (a stupeň se sníží o jeden).
- Vytknutím mínus změníme znaménka uvnitř.
- Rozkladové vzorce $A^2 - B^2 = (A-B)\cdot(A+B)$, $a^3 + b^3 = (a+b)\cdot(a^2 - ab + b^2)$, $a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 + ab + b^2)$.
- $x^2 + 7x + 10 = (x+2)\cdot(x+5)$ - součin měl dát 10 a součet 7.
- $3y^2 + 4y + 1 = 3y^2 + 3y + y + 1 = 3y\cdot(y+1) + (y+1) = (y+1)(3y+1)$

Zádrhele

- Na součin nejde rozložit všechno.
- Při násobení, umocňování a používání vzorců nesmíme zapomenout na "vnitřky".
- Při vytýkání nesmíme zapomenout na jedničku: $3y\cdot(y+1) + (y+1) = (y+1)(3y+1)$.

Dobré rady

- Držet mnohočleny seřazené podle stupně.
- Vzorce $(a+b)^2, (a+b)^3$ mají spoustu pravidelností, které se dají kontrolovat, nemusíme si je pamatovat celé.
- Při dosazování do vzorců a vytýkání používat závorky.

Př. 1: O kolik se zvětší hodnota výrazu $(2-x)^2(x+1)$, když se x zvětší o 2?

Původní hodnota:
$(2-x)^2(x+1) = (4-4x+x^2)(x+1) = 4x - 4x^2 + x^3 + 4 - 4x + x^2 = x^3 - 3x^2 + 4$
Nová hodnota:
$(x+2)^3 - 3(x+2)^2 + 4 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 3(x^2 + 4x + 4) + 4 =$
$x^3 + 6x^2 + 12x + 12 - 3x^2 - 12x - 12 = x^3 + 3x^2$
Zvětšení:
$x^3 + 3x^2 - (x^3 - 3x^2 + 4) = 6x^2 - 4$

Př. 2: Zjednoduš $(x-1)^2(x+2)-(x-3)^3$.

$$(x-1)^2(x+2)-(x-3)^3=(x^2-2x+1)(x+2)-(x^3-3\cdot x^2\cdot 3+3x\cdot 3^2-3^3)=$$
$$x^3-2x^2+x+2x^2-4x+2-x^3+9x^2-27x+27=9x^2-30x+29$$

Př. 3: Rozlož na součin.
a) x^2-5x+6 b) $4x^2-y^4$ c) $x^4+3x^3-x^2-3x$

a) $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$

b) $4x^2-y^4=(2x)^2-(y^2)^2=(2x-y^2)(2x+y^2)$

c) $x^4+3x^3-x^2-3x=x(x^3+3x^2-x-3)=x\left[x^2(x+3)-(x+3)\right]=x(x+3)(x^2-1)=$
$x(x+3)(x-1)(x+1)$

Př. 4: Vyděl mnohočleny $(6x^3-5x^2+10x-3):(3x-1)$.

$$\begin{array}{l}
(6x^3-5x^2+10x-3):(3x-1)=2x^2-x+3\\
\underline{-(6x^3-2x^2)}\\
\qquad -3x^2+10x-3\\
\qquad \underline{-(-3x^2+x)}\\
\qquad\qquad 9x-3\\
\qquad\qquad \underline{-(2x-1)}\\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Platí: $(6x^3-5x^2+10x-3):(3x-1)=2x^2-x+3$.

Př. 5: Pomocí vzorce $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ odvoď vzorec pro $(a+b)^4$. Výsledek ověř pomocí vzorce $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Bez dalších výpočtů napiš vzorec pro $(a-b)^4$.

$$(a+b)^4=(a+b)^3(a+b)=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)\cdot(a+b)=$$
$$a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3+a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4=$$
$$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

Ověření.

$$(a+b)^4=(a+b)^2(a+b)^2=(a^2+2ab+b^2)\cdot(a^2+2ab+b^2)=$$
$$a^4+2a^3b+a^2b^2+2a^3b+4a^2b^2+2ab^3+a^2b^2+2ab^3+b^4=$$
$$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

Vzorec pro $(a-b)^4$ se od vzorce pro $(a+b)^4$ bude lišit pouze ve znaménkách pro členy s lichými mocninami *b*: $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$.

Př. 6: Rozlož na součin.
a) $x^2 - x - 30$ b) $4y^2 + 7y + 3$ c) $-x^2 - 3x + 10$

a) $x^2 - x - 30 = (x-6)(x+5)$

b) $4y^2 + 7y + 3 = 4y^2 + 4y + 3y + 3 = 4y(y+1) + 3(y+1) = (y+1)(4y+3)$

c) $-x^2 - 3x + 10 = -(x^2 + 3x - 10) = -(x+5)(x-2)$

Př. 7: Jaké nejmenší hodnoty může nabývat výraz $x^2 + 2x + y^2 + z^2 - 6z$?

Upravujeme na druhé mocniny (které jsou vždy ≥ 0).
$x^2 + 2x + y^2 + z^2 - 6z = x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 + z^2 - 2z \cdot 3 + 3^2 - 3^2 =$
$(x+1)^2 - 1 + y^2 + (z-3)^2 - 9 = (x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 - 10$
$\Rightarrow$ výraz je vždy větší než –10.

Př. 8: Vyděl mnohočleny $(x^4 - x^2 + 2):(2x^2 + 2x + 1)$.

$$
\begin{array}{l}
(x^4 - x^2 + 2):(2x^2 + 2x + 1) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \\
\underline{-\left(x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)} \\
\qquad -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2 \\
\quad \underline{-\left(-x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x\right)} \\
\qquad\quad -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \\
\qquad \underline{-\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)} \\
\qquad\qquad\qquad x + \frac{9}{4}
\end{array}
$$

Platí: $(x^4 - x^2 + 2):(2x^2 + 2x + 1) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{4x+9}{4(2x^2 + 2x + 1)}$.

Př. 9: Zjednoduš $(3x-1)^2(x+3)-(2x+3)^3$.

$(3x-1)^2(x+3)-(2x+3)^3=(9x^2-6x+1)(x+3)-\left[(2x)^3+3(2x)^2\cdot 3+3\cdot 2x\cdot 3^2+3^3\right]=$

$9x^3-6x^2+x+27x^2-18x+3-(8x^3+36x^2+54x+27)=x^3-15x^2-71x-24$

Př. 10: O kolik se zmenší hodnota výrazu $(2x-y)^3-(2x^2+y^2)(y-x)$, když se x zmenší o 2 a y zvětší o 1?

Původní hodnota výrazu:

$(2x-y)^3+(2x^2+y^2)(y-x)=\left[(2x)^3-3\cdot(2x)^2y+3\cdot 2xy^2-y^3\right]+(2x^2y-2x^3+y^3-xy^2)=$

$8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3+2x^2y-2x^3+y^3-xy^2=6x^3-10x^2y+5xy^2$

Nová hodnota:

$6(x-2)^3-10(x-2)^2(y+1)+5(x-2)(y+1)^2=$

$=6(x^3-6x^2+12x-8)-10(x^2-4x+4)(y+1)+5(x-2)(y^2+2y+1)=$

$=6x^3-36x^2+72x-48-10(x^2y-4xy+4y+x^2-4x+4)$

$+5(xy^2+2xy+x-2y^2-4y-2)=6x^3-36x^2+72x-48$

$-10x^2y-40xy+40y+10x^2-40x-40+5xy^2+10xy+5x-10y^2-20y-10=$

$=6x^3-10x^2y+5xy^2-26x^2-10y^2-30xy+37x+20y-98$

Zmenšení výrazu.

$6x^3-10x^2y+5xy^2-(6x^3-10x^2y+5xy^2-26x^2-10y^2-30xy+37x+20y-98)$

$=26x^2+10y^2+30xy-37x-20y+98$

Shrnutí: